

XXI олимпиада имени А.М.Красникова, заочный тур
Математика, 10 класс

1. Из большого кубического куска сыра вырезали и съели кубический кусок поменьше (одна из граней вырезанного куска лежит на грани большого куска). В результате площадь поверхности сыра увеличилась на 24%. На сколько процентов уменьшился его объём?
2. Сергей Иванович выписал все натуральные делители числа n , лежащие в отрезке $[2^{100}, 3^{100}]$. Может ли оказаться, что он выписал ровно 100 чисел и ровно 35 из них — кубы натуральных чисел?
3. Продолжение биссектрисы BL треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке K . Биссектриса внешнего угла B пересекает продолжение отрезка CA за точку A в точке N . Докажите, что если $BK = BN$, то отрезок LN равен диаметру описанной окружности треугольника.
4. Есения и Стефания по очереди выписывают на доску натуральные числа, не превосходящие 1000, причем число 13 выписывать нельзя. Начинает Есения. Проигрывает та девочка, после хода которой на доске впервые появятся два одинаковых числа или два числа, отличающиеся на 17. Кто из девочек выиграет при правильной игре, и как ей для этого надо играть?
5. Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{f(3)}{g(3)} = 2$. Найдите $f(1)$, если известно, что $g(1)=2$, $f(5)=7$, $g(5)=2$.
6. Два брата продали стадо коров, выручив за каждую корову столько рублей, сколько было в стаде коров. Желая разделить выручку поровну, они стали по очереди, начиная со старшего брата, брать из общей суммы по 10 рублей. После того, как старший брат в очередной раз взял 10 рублей, младшему осталось меньше 10 рублей. Чтобы обеспечить равный делёж, старший брат отдал младшему свой нож. Во сколько рублей оценён нож?
7. Платон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Платоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

8. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.
- а) На доске выписан набор $-11, -7, -5, -4, -1, 2, 6$. Какие числа были задуманы?
 - б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?
 - в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?