

10.1. Несколько железных и медных звеньев соединены в цепочку по кругу, каждое звено соединено с двумя звеньями. При этом по соседству с каждым железным звеном находятся разные звенья, и через одно от каждого медного звена находятся разные звенья. Сколько в цепочке медных звеньев, если железных звеньев в ней 30?

Решение. Ответ: 60. По первой части условия, не бывает ни железного звена, у которого оба соседа медные, ни трех или больше подряд железных звеньев. Железные звенья в цепочке расположены, таким образом, парами, а между этими парами расположены какие-то количества медных звеньев. Пусть наименьшее количество медных звеньев, расположенных между двумя подряд парами железных, равно N . Если $N \geq 5$, то выбрав пять подряд медных звеньев обнаружим, для для третьего из них не выполняется вторая часть условия. Для $N = 1, 2, 3$ имеем соответственно

ЖЖМЖЖ, ЖЖММЖЖ, ЖЖМММЖЖ

Вторая часть условия здесь не выполняется для всех медных звеньев в первом и втором случае и для второго медного звена в третьем случае. Поэтому N не может быть равно ни 1, ни 2, ни 3. Остается $N = 4$, и нетрудно заметить, что для цепочки

...МММЖЖММММЖЖММММЖЖМ...

условие выполняется. В этой цепочке на каждые два железных звена приходится четыре медных, значит медных звеньев вдвое больше, чем железных. То есть, их $2 \cdot 30 = 60$.

10.2. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение

$$2 \cos 2x + 4a \sin x = 3?$$

Решение. Ответ: при $|a| \geq 1$. Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1, 1]$. Тогда уравнение принимает вид $2(1 - 2t^2) + 4at - 3 = 0$ или $4t^2 - 4at + 1 = 0$. Это уравнение можно переписать так: $(2t - a)^2 = a^2 - 1$. Отсюда видно, что при $a^2 - 1 < 0$ (то есть при $a \in (-1, 1)$) уравнение решений не имеет. Пусть $|a| \geq 1$. Тогда $t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 1}}{2}$. Покажем, что $t = \frac{a - \sqrt{a^2 - 1}}{2} \in [-1, 1]$ при $a \geq 1$. Действительно,

$$0 \leq \frac{a - \sqrt{a^2 - 1}}{2} = \frac{a^2 - (a^2 - 1)}{2(a + \sqrt{a^2 - 1})} \leq \frac{1}{2a} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Аналогично $t = \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{2} \in [-1, 1]$ при $a \leq -1$. Таким образом, при $|a| \geq 1$ хотя бы один из корней $t = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 1}}{2}$ лежит на отрезке $[-1, 1]$, и для него уравнение $\sin x = t$, а с ним и исходное уравнение, имеет решение.

10.3. Для каких натуральных значений n числа $1, 2, \dots, 2n$ можно разбить на пары так, что если сложить числа в этих парах, а потом все эти суммы перемножить, то получится квадрат натурального числа?

Решение. Ответ: при всех $n > 1$. При $n = 1$ будет одна пара с суммой $1 + 2 = 3$ — это не точный квадрат.

Пусть $n > 1$. Если n четно, то разобьем все числа на четверки подряд идущих. Внутри одной четверки квадрат получаем так: $(a + (a + 3))((a + 1) + (a + 2)) = (2a + 3)^2$. Тогда и произведение по всем четверкам будет полным квадратом. Если же n нечетно, то выделим группу из чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6$, а остальное разобьем на четверки подряд идущих. Квадрат из четверки делаем так же, как в предыдущем случае. А для группы из шести чисел имеем $(1+5)(2+4)(3+6) = 6 \cdot 6 \cdot 9 = 18^2$. Вновь произведение квадратов, полученное в каждой группе, дает полный квадрат.

10.4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX = BY$. Точки A, X, Y, C оказались при этом на одной окружности. Докажите, что тогда $LX \parallel BC$, если отрезок BL – биссектриса треугольника ABC .

Решение. Поскольку точки A, X, Y, C лежат на одной окружности, имеем $BX \cdot BA = BY \cdot BC$, то есть $\frac{AB}{BC} = \frac{BY}{BX}$. С другой стороны, по свойству биссектрисы имеем $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$. Поэтому

$$\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BY}{BX} = \frac{AX}{XB}.$$

По теореме, обратной теореме Фалеса, получаем $LX \parallel BC$.

10.5. 100 стоят по одной в каждой клетке полосы 100×1 . Поменять местами любые две соседние фишки стоит 1 рубль, а поменять местами любые две фишки, между которыми стоит ровно 4 фишки, можно бесплатно. Другие операции делать нельзя. Нужно переставить фишки в обратном порядке. Какое наименьшее количество рублей нужно для этого потратить?

Решение. Ответ: 61 рубль. Занумеруем фишки и места для них номерами от 0 до 99. Заметим, что бесплатная операция не меняет остаток номера места фишки от деления на 5. Поэтому мы можем бесплатно перемещать фишки внутри каждой из пяти групп по 20 фишек, соответствующих одинаковым остаткам от деления на пять их мест. Будем называть эти группы условно группами 0, 1, 2, 3, 4.

Покажем сначала, что 60 или меньше рублей на расстановку фишек в обратном порядке не хватит. Расположим фишки мысленно по кругу, на котором фишки идут в таком порядке: группа 0 – группа 1 – группа 2 – группа 3 – группа 4 – группа 0. При перестановках на полоске фишки группы 0 должны занять место фишек группы 4 и наоборот, а фишки группы 1 должны занять место фишек группы 3 (и наоборот). Поэтому фишки групп 0 и 4 должны участвовать хотя бы в одном ходе каждая, а фишки групп 1 и 3 хотя бы в двух ходах каждая. Поэтому общее количество рублей не может быть меньше $(20 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 2)/2 = 60$. Если бы рублей было потрачено ровно 60, то никакая фишка второй группы не участвовала бы в ходе. Но в этом случае фишки групп 1 и 3 должны были бы участвовать не в двух, а в трех ходах каждая (1 переходит в 3 через группы 0 и 4), и общее количество рублей становится больше 60. Итак, хотя бы одна фишка группы 2 участвовала в операциях, и значит рублей потрачено не меньше 61.

Покажем теперь, как добиться цели, потратив ровно 61 рубль. Сначала бесплатно перегоним фишки групп 0 и 4 в позиции, соседние с их итоговыми местами (например, фишку 4 в позицию 94, а фишку 5 в позицию 95). Поменяв один раз местами каждую из 20 соседних пар фишек из групп 0 и 4, мы за 20 рублей поставим фишки этих групп на итоговые места. Чтобы разобраться с группами 1, 2 и 3, вспомним, что перемещение фишек внутри групп бесплатное. Обменяем какую-нибудь фишку группы 2 (например, фишку 2) с фишкой x группы 1 (это стоит 1 рубль). А затем обменяем фишку x (она сейчас на месте, относящемся ко второй группе) на фишку y из группы 3 (еще 1 рубль). За два рубля мы поместили фишку группы 1 в группу 3. Сделаем это еще раз, используя вместо фишки 2 фишку y , теперь находящуюся на месте из 2 группы. После этого потрачено 4 рубля, 2 фишки из группы 1 стоят на местах группы 3, 1 фишка из группы 3 (это y) стоит на месте из группы 1. Если сделать такую операцию всего 20 раз (по одному разу для каждой фишки из группы 1), то будет потрачено 40 рублей, все 20 фишек из группы 1 будут на местах из группы 3, 19 фишек из группы 3 будут на местах группы 1. Наконец, еще за 1 рубль поменяем фишку из группы 2 (ту самую фишку 2), сейчас стоящую на месте из группы 1, на фишку из группы 3, сейчас стоящую на месте из группы 2. В итоге все фишки окажутся на местах из нужных групп за 61 рубль.

11.1. Что больше: $\sin 1 + \cos 1$ или $\frac{49}{36}$? Объясните свой ответ.

Решение. Первое больше. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Эта функция убывает на интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, и поскольку $1, \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, то из $1 < \frac{\pi}{3}$ следует $\sin 1 + \cos 1 > \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$. Сравним $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ и $\frac{49}{36}$. Вычитая $\frac{1}{2}$ из обоих чисел получим $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{31}{36}$, умножая на 2 получим $\sqrt{3}$ и $\frac{31}{18}$. Наконец, возводя в квадрат оба положительных числа, получим 3 и $\frac{961}{324}$. Поскольку второе число меньше, то и $\sin 1 + \cos 1 > \frac{\sqrt{3} + 1}{2} > \frac{49}{36}$.

11.2. Число назовем замечательным, если оно целое двенадцатизначное, при этом делится на 9 и содержит в своей десятичной записи только цифры 3 и 4. Сколько существует замечательных чисел?

Решение. Ответ: 221 чисел. Пусть в составе числа x троек ($0 \leq x \leq 12$). Тогда по признаку делимости на 9 должно быть $3x + 4(12 - x) = 9k$, то есть $48 - x = 9k$ для некоторого целого k . Это возможно при $x = 12$ или $x = 3$. В первом случае замечательное число одно и записывается 12 тройками. Если же троек 3, то чисел $C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220$. Всего получаем 221 чисел.

11.3. Известно, что многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - c$ имеет три различных корня a, b, c . Чему могут быть равны a, b и c .

Решение. Ответ: $a = 1, b = -2$ и $c = 0$. По условию, $x^3 + ax^2 + bx - c = (x - a)(x - b)(x - c)$. Раскрывая скобки в правой части, получим

$$\begin{cases} -a - b - c = a, \\ ab + bc + ca = b, \\ -abc = -c. \end{cases}$$

Из последнего равенства этой системы получаем $c = 0$ или $ab - 1 = 0$. При $c = 0$ получим систему $2a + b = 0, ab = b$. Поскольку $c = 0$, а a, b, c попарно различны, имеем $b \neq 0$ и тогда $a = 1, b = -2$.

Рассмотрим случай, когда $c \neq 0$ и $ab = 1$. Из первого уравнения системы $c = -2a - b$. Подставляя во второе, получим $ab + (a + b)c = 1 + (a + b)(-2a - b) = b$. Подставляя $b = \frac{1}{a}$ в равенство $1 + (a + b)(-2a - b) = b$, получим

$$1 + \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(-2a - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \quad \text{или} \quad 2a^2 + 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 0.$$

Последнее уравнение не имеет решений. Действительно, при $a > 0$ правая часть уравнения положительна как сумма четырех положительных слагаемых. Если $a \leq -1$, то $2a^2 + 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \left(2 + \frac{1}{a}\right) + 2a^2 + \frac{1}{a^2}$ положительно как сумма трех положительных слагаемых. Наконец, если $-1 < a < 0$, то $2a^2 + 2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}\right) + 2a^2 + 2$ также положительно как сумма трех положительных слагаемых.

11.4. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около этого треугольника окружность в точках A_1, B_1 и C_1 . При этом окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается одной из сторон треугольника ABC . Зная, что один из углов треугольника ABC равен 40° , найдите два других угла.

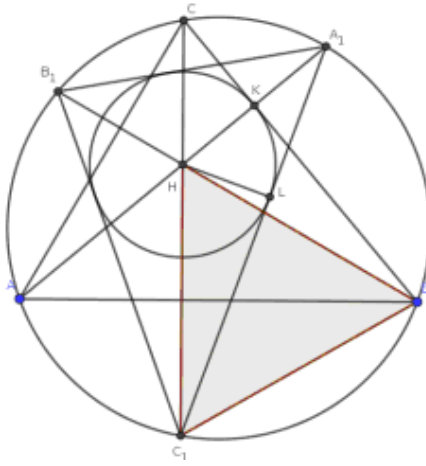


Рис. 1: К задаче 11.4

Решение. Ответ: 60° и 80° . Пусть для определенности окружность ω , вписанная в $A_1B_1C_1$, касается стороны BC . Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC , точка K – точка касания ω и BC , точка L – точка касания ω и A_1C_1 . Докажем, что треугольник HBC_1 – равносторонний. В этом случае было бы $\angle BAC = \angle BC_1C = 60^\circ$ и получился бы наш ответ.

Во-первых, заметим, что H – точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, $\angle B_1C_1C = \angle B_1BC = 90^\circ - \angle C = \angle CAA_1 = \angle CC_1A_1$, то есть C_1H – биссектриса угла $A_1C_1B_1$. Аналогично доказывается, что B_1H – биссектриса угла $C_1B_1A_1$ и A_1H – биссектриса угла $B_1A_1C_1$. Значит, точка H – центр вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и $HK = HL$. Во-вторых, из только что доказанного следует $\angle HC_1L = \angle HBK$. А это значит, что прямоугольные треугольники HC_1L и HBK равны по катету и острому углу. Поэтому $HC_1 = HB$.

Докажем, наконец, что $HB = BC_1$. Действительно, треугольники HAB и C_1AB равны по стороне и двум углам (сторона AB общая, а также $\angle HAB = \angle C_1AB$ и $\angle HBA = \angle C_1BA$). Из равенства треугольников следует равенство их соответствующих сторон (то есть что $HB = C_1B$). Итак, треугольник HBC_1 равносторонний.

11.5. В каждой клетке таблицы 10×10 сначала стоит число 0. За один ход в таблице нужно взять минимальное число (если минимальных чисел несколько, то выбирается одно любое) и к этому числу, а также ко всем числам в соседних клетках (соседняя в этой задаче – имеющая общую сторону или общий угол) прибавляется по единице. Какое наибольшее число может присутствовать в таблице после 80 операций?

Решение. Ответ: 20. Назовем n -ой фазой несколько подряд операций, каждая из которых применяется к числам, равным n . В частности, фаза может состоять из нуля операций. Мы начинаем с нулевой фазы (так как в начале по условию все числа равны 0). Заметим, что в течение одной фазы никакое число не может увеличиться больше, чем на 4. Действительно, если мы увеличили некоторое число, то ни к нему, ни к его соседям нельзя применить операцию снова в данной фазе (эти числа перестали быть равны минимуму, каким он был на момент начала фазы). Для данного числа существует не более 4 соседей, которые не являются соседями между собой. Поэтому в течение фазы число будет изменено не более 4 раз.

Рассмотрим 16 клеток, стоящих в пересечениях 1-й, 4-й, 7-й, 10-й строк и 1-го, 4-го, 7-го, 10-го столбцов. Ясно, что никакая операция не затрагивает две или больше из этих клеток. Поэтому чтобы сменилось n фаз, нужно сделать не менее $16n$ операций (здесь не утверждается, что любая отдельная фаза требует хотя бы 16 операций). Таким образом, прошло не более $80/16 = 5$ фаз, за каждую из которых никакое число не может увеличиться более чем на 4. Поэтому на доске после 80 операций не могут присутствовать числа больше 20.

Пример: Если мы будем применять операции *только* к 16 клеткам, стоящим в пересечениях 2-й, 4-й, 7-й, 10-й строк и 2-го, 4-го, 7-го, 10-го столбцов, то можно будет сделать 5 полных фаз, число в клетке (3; 3) на каждой фазе будет увеличиваться ровно на 4 и станет в итоге равно 20.

Типовые критерии оценивания олимпиадных задач по математике

За каждую задачу можно выставить от 0 до 7 баллов. Приведем признаки того или иного количества баллов

7 баллов ставится за полное обоснованное решение задачи. Отсутствуют недостаточно обоснованные тезисы. Если в задаче предполагается ответ, то ответ верный

6 баллов ставится за решенную задачу. Отсутствуют недостаточно обоснованные тезисы. Балл неполный либо из-за вычислительных ошибок, не могущих повлиять на смысл решения; либо если отсутствует одна явно написанная **стандартная** логическая связка

5 баллов ставится за решенную задачу. Это так называемое «неряшливое решение». Решение содержит полный комплект тезисов, достаточных (в случае их полной обоснованности) для решения. При этом: 1) некоторые, не многие, тезисы недостаточно обоснованы в тексте решения; 2) тезисы, которые не обоснованы (или недостаточно обоснованы) легко может «с ходу» обосновать любой здравомыслящий читатель (не автор!). Возможно, есть ошибки в вычислениях, не могущие повлиять на смысл решения

4 балла Редкая оценка. Если в задаче явно просматриваются два равноправных случая, подробно обоснован один из них, а другой рассмотрен тезисно без достаточного обоснования. Или в задачах на «оценку и пример» сделана более трудная часть, а другая отсутствует

3 балла задача не решена. Рассмотрен с полным обоснованием один из двух основных равноправных случаев, при этом что делать в оставшемся случае – не указано. Либо, если решение содержит типичные этапы, выполнена половина этапов

2 балла задача не решена. Намечена схема решения, которая при реализации привела бы к решению. **В решении есть элементы обоснования.** При этом в решении есть хотя бы один тезис, на котором основано все решение, а этот тезис недостаточно очевиден и требует обоснования (которого нет). Либо начат (незавершенный) полный перебор вариантов; при этом автор делал попытку делать именно полный перебор

1 балл Рассмотрены частные случаи, относящиеся к вопросу задачи. В отличие от случая двух баллов по решению видно, что полный перебор вариантов не предпринимается. Или 1 балл можно поставить в случае, когда решение представляет собой набор необоснованных тезисов, доказательство которых (если бы оно было) приближало бы к решению

0 баллов Отсутствуют продвижения в решении. Например, не использована часть условия задачи. Или решена другая задача. Или только ответ без проверки в задаче с ответом. И все, что не относится к случаям 1 – 7 баллов

Уважаемые члены жюри! Обратите внимание практику использования оценок. Любое решение тяготеет либо к состоянию «полностью решено» (это 7 баллов), либо к состоянию «не решено» (это 0 баллов). Например, на завершающих этапах Всероссийской олимпиады школьников доля оценок 7 или 0 за задачу традиционно составляет больше половины. Поэтому относитесь критически к оценкам **2, 3, 4, 5 баллов (особенно 3 и 4)**. Ставить такие оценки следует, только если это необходимо. Оценок 2, 3, 4, 5 (особенно 3 и 4) не может быть много.

В добавление об общем духе оценивания:

– На полный балл оценивается любое обоснованное решение. Решение не обязано быть похожим на решение жюри

– Мы не используем понятия «нерациональное решение». Единственный недостаток решения – это его недостаточная обоснованность

– В частности, если в задаче достаточно представить пример, то участник не обязан пояснять в решении, откуда взялся пример. Разве что, если для приведенного примера выполнение условия задачи неочевидно, то участнику следовало бы это условие проверить

– Если в рассуждении есть неочевидный недоказанный тезис, на котором базируется **все** решение целиком, то задача не решена, а баллов не более 3

– Баллы мы ставим не за сообразительность, а за ясность решения. Чем больше члену жюри приходится «соображать» при чтении решения, тем меньше баллов достается участнику

– Мы оцениваем текст решения, а не все то, что может говорить о тексте автор. Это может иметь значение на апелляции